Formulación Matemática del Problema de Planificación Óptima

Leonid V. Kantorórich

La Asignación Óptima de los Recursos Económicos[1], 1965. Primer Apéndice.

ESTE apéndice proporciona una formulación matemática general y un análisis de los problemas involucrados en la construcción de un plan óptimo, que fueron descritos en el texto principal del libro y se ilustraron mediante ejemplos numéricos. Una generalización y exposición más formal de esto, que requiere un conocimiento básico de matemáticas, conduce a una comprensión más profunda de las relaciones cuantitativas involucradas y proporciona una concepción clara del campo en el cual se aplican los métodos. Las matemáticas son necesarias también para obtener soluciones técnicas de estos problemas en casos complejos cuando hay un gran número de factores diferentes (el Apéndice II se dedica a los métodos para encontrar soluciones).

Sin embargo, este apéndice solo requiere una preparación matemática elemental para ponerlo al alcance de aquellos que no son especialistas en matemáticas. Esto, junto con las limitaciones de espacio, nos ha obligado a abandonar la generalidad matemática completa en este apéndice, y algunos casos especiales han tenido que ser omitidos

El Problema de Asignación de Programas[2]

La formulación general de este problema, descrita en la sección l del capítulo I, es como sigue: Nos enfrentamos con m unidades de producción (empresas, instalaciones, máquinas) que deben fabricar n productos distintos (clases de operaciones) en una producción determinada. Una proporción o conjunto completo consiste en $k_1, k_2, ..., k_n$ unidades de productos $(1), (2), \cdots, (n)$. Se conoce la productividad de cada sector para cada producto: el producto $j\,(j = 1, 2, ..., n)$ puede ser fabricado en la unidad $i\,(t = 1, 2, ..., m)$ a razón de a_{ij} unidades por unidad de tiempo. Se trata de repartir las operaciones entre las unidades de manera que se obtenga un máximo de conjuntos proporcionales completos en unidad de tiempo.
Si se designa por $h_{ij} (i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$ la porción de tiempo de trabajo i que se destina a la producción del producto j, la consecución del plan óptimo plantea el siguiente problema matemático:
Problema A: Dado los números no negativos:

$$\{a_{ij}\} \quad (i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n), \quad k_j > 0 \quad (j = 1, \cdots, n),$$

para los cuales $\max a_{ij} > 0 \quad (j = 1, \cdots, n)\ 1 \leq i \leq m$ (cada producto puede ser producido por al menos una de las unidades de producción). Se trata de definir el conjunto de valores (el plan) $\pi = \{h_{ij}\}\,(i = 1, \cdots, m; j = 1, \ ..., n)$ que cumple con las siguientes condiciones:

[1] El archivo base empleado, que se puede revisar para las auto referencias del capítulo, puede leerse en: https://archive.org/details/bestuseofeconomi0000kant/page/n5/mode/2up

Traducción y edición realizada por *Ronald Eduardo Portocarrero Hoyos* con fines de divulgación. No se reclama autoría sobre la obra original.

[2] Este problema fue estudiado en [1]

1. $h_{ij} \geq 0$ $(i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)$ (la fracción de tiempo de trabajo empleada por una unidad de producción para el procesamiento de un producto dado es un número no negativo);

2. $\sum_{j=1}^{n} h_{ij} \leq 1$ $(i = 1, \cdots, m)$ (el tiempo de trabajo total de cada unidad de producción está limitado por el tiempo calendario planificado);

3. La cantidad
$$\mu(\pi) = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{x_j^{\pi}}{k_j}, \tag{1}$$
donde
$$x_j^{\pi} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} h_{ij} \ (j = 1, \cdots, n), \tag{2}$$
alcanza su valor máximo posible (los números x_j^{π} expresan la producción total de los diversos productos si el trabajo se realiza según el plan π, y la cantidad $\mu(\pi)$ muestra la escala de producción bajo este plan, el número de conjuntos completos variados producidos por unidad de tiempo).

El plan π que satisface las condiciones (1-3) será llamada *óptimo* y *realizable* si satisface 1. y 2.

Observemos, ante todo, que siempre existirá un plan óptimo para el problema A. (Aquí se hace referencia a la Conclusión 1, p.7 del libro)

Conclusión 1: *Entre todas las posibles asignaciones del programa, siempre existe un plan mejor, óptimo. En este plan, las proporciones de las distintas clases de producción responden a las condiciones deseadas; además, el volumen de la producción es el más elevado (o igual), y los gastos por unidad de producción son más pequeños que para cualquier otro plan que cumpla también aquellas mismas proporciones. Para este plan, el precio de coste de la producción es inferior (o igual) al precio de coste de cualquier otro plan de asignación.*

De hecho, sea $\pi_v = \left\{h_{ij}^v\right\}$ $(v = 1, 2, \cdots)$ una secuencia de planes factibles tal que $\mu(\pi_v) \to \mu = \sup \mu(\pi)$, donde el límite superior exacto (sup) se toma para todos los planes factibles π. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir obviamente que la secuencia converge al límite

$$\lim_{v \to \infty} h_{ij}^v = h_{ij} \quad (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$$

(dicha convergencia siempre existe para alguna subsecuencia). Entonces, el plan $\pi = \left\{h_{ij}\right\}$ es óptimo.

Ahora podemos formular una proposición en forma general sobre una propiedad característica de un plan óptimo: la existencia de valoraciones o.d. para todos los tipos de productos (ver Conclusión 2, p. 8).

Conclusión 2: *Del plan óptimo se desprenden evaluaciones bien definidas de cada clase de producción —o, de modo más exacto, de los trabajos para la fabricación de una unidad de producto de cada clase— que son las evaluaciones objetivamente determinadas (abreviado, evaluaciones o.d.).*

Teorema 1. Para determinar si un plan factible es óptimo, es necesario y suficiente que existan multiplicadores $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (valoraciones para todos los tipos de productos) tales que:

(a) $c_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n), \quad \max_{1 \leq j \leq n} c_j > 0$ (estas valoraciones son no negativas, con al menos uno de los productos teniendo una valoración positiva);

(b) $c_j a_{ij} = \max_{1 \leq t \leq n} c_t a_{it} = d_i, \quad$ solo si $\quad h_{ij} \neq 0$ (cada unidad de producción se utiliza solo para la preparación de aquellos productos para los cuales su valoración de productividad es máxima; los números d_i pueden tomarse como la valoración del poder productivo de las unidades de producción);

(c) $c_j = 0, \quad$ si $\quad x_j^{\pi} > k_j \mu(\pi)$ (para aquellos productos que se producen en exceso, las valoraciones son iguales a 0);

(d)

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} = 1, \quad \text{si} \quad d_i \neq 0$$

(las unidades de producción con valoraciones positivas de poder productivo se utilizan completamente).

De hecho, si para un plan factible dado $\pi = \{h_{ij}\}$ existen tales multiplicadores, entonces para cualquier otro plan factible $\pi' = \{h_{ij}\}$, tenemos, a partir de (1), (2) y las condiciones 1., 2., (a-d):

$$\left(\sum_j c_j k_j\right) \mu(\pi') \leq \sum_j c_j x_j^{\pi'} = \sum_j c_j \sum_i a_{ij} h_{ij} = \sum_i \sum_j (c_j a_{ij}) h'_{ij}$$
$$\leq \sum_i d_i \sum_j h'_{ij} \leq \sum_i d_i = \sum_i d_i \sum_j h_{ij} = \sum_j \sum_i (c_j a_{ij}) h_{ij}$$
$$= \sum_j c_j \sum_i a_{ij} h_{ij} = \sum_j c_j x_j^{\pi} = \sum_i c_j \left[k_j \mu(\pi)\right] = \left(\sum_j c_j k_j\right) \mu(\pi),$$

lo que lleva a la desigualdad $\mu(\pi') \leq \mu(\pi)$. Dada la elección arbitraria de un plan factible π', esta desigualdad muestra que el plan dado π es óptimo, y se ha demostrado la primera parte del teorema. La segunda proposición, que para cada plan óptimo existe un conjunto de multiplicadores que satisfacen las condiciones (a-d), se demostrará a continuación, donde se considerará un problema más general.

Nota 1. Si cualquier valor a_{ij} es mayor que 0 (cada producto puede ser fabricado en cualquier unidad), el plan óptimo $\pi = h_{ij}$ y sus correspondientes multiplicadores las siguientes condiciones de acuerdo con el Teorema 1

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} = 1, \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{2'}$$

(todas las unidades funcionan óptimamente);

$$\frac{x_1^{\pi}}{k_1} = \frac{x_2^{\pi}}{k_2} = \cdots = \frac{x_n^{\pi}}{k_n} = \mu(\pi) \tag{3'}$$

(se respetan las proporciones de producción establecidas);

$$c_j > 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{a'}$$

(todos los productos tienen evaluaciones positivas).

En efecto, en este caso todos los valores $d_i > 0$, y, en consecuencia, (2′) se deduce directamente de (d). Además, para cualquier valor de j existe un valor de i para el que $h_{ij} \neq 0$ (cada producto procede por lo menos de una unidad); en consecuencia, (a′) se deriva de (b). De (a′) y (c) deducimos (3′).

Por consiguiente, en el caso considerado (cuando todos los valores $a_{ij} > 0$) para que un plan admisible π sea óptimo es necesario y suficiente que se satisfagan (2′) y (3′) y que exista un sistema de multiplicadores positivos que cumpla la condición (b) (Conclusiones 4,5; p.13,15)

Conclusión 4: *Si para un plan: a) se cumple la condición relativa a la proposición establecida (por la clase de producción); b) se observa, para ciertas evaluaciones de los artículos, el principio de rentabilidad; entonces:*

1.° *El plan dado óptimo, es decir, no existe un plan para el cual se cumpla la proporción establecida y el volumen de producción sea superior (o, de una manera general, un plan que suponga una producción de cada clase superior a la del plan dado).*

2.° *En el caso considerado, las evaluaciones mencionadas son evaluaciones objetivamente determinadas*

Conclusión 5: *Si para un cierto plan es imposible obtener evaluaciones para las cuales sea observado el principio de rentabilidad (estas evaluaciones están sometidas a condiciones contradictorias), esto demuestra que el plan dado no es óptimo, lo que significa que existe un plan para el cual el volumen de producción es superior, para cada clase de artículo, al del plan dado. El análisis anterior muestra, en estas condiciones, un camino posible para mejorar el plan.*

Nota 2. En el caso general (cuando algunos a_{ij} son positivos), también es posible limitar la consideración a los llamados planes de la *proporción* establecida, que cumplen las condiciones 1., 2. y 3.[3], ya que cada plan factible π es un plan de surtido π' con la misma escala de producción, $\mu(\pi') = \mu(\pi)$ (para obtener dicho plan, es suficiente reducir ciertos h_{ij}, que corresponden a aquellos productos que se producen en exceso, $x_j^{\pi} > k_j\mu(\pi)$, y aumentar otros h_{ij}, correspondientes a $a_{ij} = 0$).

Nota 3. Consideremos que todos los costos de producción son sumas de gastos, los cuales son proporcionales a los volúmenes de producción de cada producto, y de los desembolsos en el trabajo realizado por las unidades de producción, que son independientes del tipo de productos fabricados por ellas. Entonces, para un plan de surtido óptimo, los costos de algún conjunto de productos del surtido son mínimos (ver Conclusión 1, p. 7).

Conclusión 1: *Entre todas las posibles asignaciones del programa existe siempre un plan mejor, óptimo. Para este plan, las proporciones de las distintas clases de producción responden a las condiciones deseadas; el volumen de la producción es el más elevado (o igual), y los gastos por unidad de producción son más pequeños que para cualquier otro plan que cumpla también aquellas mismas proporciones. Para este plan, el precio de costo de la producción es inferior (o igual) al precio de costo de cualquier otro plan de asignación*

Para cualquier plan factible π', estos costos comprenden

$$\frac{1}{\mu(\pi')}\left(\sum_j p_j x_j^{\pi'} + \sum_i r_i\right) \geq \sum_j p_j k_j + \frac{1}{\mu(\pi')}\sum_i r_i \geq \sum_j p_j k_j + \frac{1}{\mu(\pi)}\sum_i r_i \tag{3}$$

donde p_j son los costos de producir una unidad de producto (j) $(j = 1, \cdots, n)$; $r_i (i = 1, \cdots, m)$ son los gastos operativos de la unidad de producción; $\mu(\pi)$ es la escala de producción bajo un plan óptimo; y las desigualdades (3) se convierten en ecuaciones si, y solo si, π' es un plan de surtido óptimo.

Nota 4. El problema A puede siempre reducirse al caso en que $k_1 = \cdots = k_n = 1$ (son iguales las cantidades de los diferentes productos). En efecto, si para cada producto (j) se escoge una nueva unidad igual a k_j de las antiguas unidades, se obtiene:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{k_j} \quad (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n), \quad k'_j = 1 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

Caso de producción múltiple

Supongamos ahora que en cada unidad de producción $(i)(i = 1, ..., m)$ se dispone de r_i procedimientos de funcionamiento; de la utilización del procedimiento s resulta la siguiente producción $a_{i1}^s, a_{i2}^s, ..., a_{in}^s$ en la

[3]Se identifica cierta imprecisión. Mientras que la edición en inglés citada utiliza la notación 1, (2′) y (3′), se constata que una edición en español prefiere la expresión verbal. Este matiz específico queda sujeto a la consideración del lector

unidad i. En tal caso, aparece el siguiente problema, más general, examinado igualmente en [1].
Problema B: Dados los números no negativos

$$a_{ij}^s \quad (i = 1, \cdots, m;\ s = 1, \cdots, r_i;\ j = 1, \cdots, n), \quad k_j > 0 \quad (j = 1, \cdots, n),$$
$$\text{para los cuales} \quad \max_{i,s} a_{ij}^s > 0,$$

se requiere determinar el conjunto de números (el plan)

$$\pi = \{h_{is}\} \quad (i = 1, \cdots, m;\ s = 1, \cdots, r_i)$$

a partir de las condiciones:

(1) $$h_{is} \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m;\ s = 1, \cdots, r_i);$$

(2) $$\sum_{s=1}^{r_i} h_{is} \leq 1 \quad (i = 1, \cdots, m);$$

(3) la cantidad

$$\mu(\pi) = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{x_j^\pi}{k_j},$$

de modo que

$$x_j^\pi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{ri} a_{ij}^s h_{is} \quad (j = 1, \cdots, n),$$

alcance el valor más grande posible.

Como anteriormente, un plan π que satisface las condiciones (1-3) se denomina *óptimo*, y uno que cumple las condiciones (1) y (2) se considera *factible*[4].

No es difícil ver que para este problema también siempre existe un plan óptimo. El siguiente teorema caracteriza el plan óptimo.

Teorema 2. Para que un plan realizable π sea óptimo, es necesario y suficiente que exista un sistema de multiplicadores $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (evaluaciones de las diversas clases de productos), tales que:

a) $$c_j \geq 0, \quad (j = 1, \cdots, n), \quad \max_{1 \leq j \leq n} c_j \geq 0$$

;

b) $$sum_{j=1}^n c_j a_{ij}^s = \max_{1 \leqslant r_i} \sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij}^t = d_i, \quad \text{si} \quad h_{ti} \neq 0;$$

c) $$c_j = 0, \quad \text{si} \quad x_j^\pi > k_j \mu(\pi); \quad \text{y}$$

d) $$\sum_{s=1}^{r_i} h_{is} = 1, \ \text{si}\ d_i \neq 0,$$

se cumplan.

[4]En la versión en español se emplea el término *realizable*

No vamos ahora a demostrar el teorema, ya que no es sino una consecuencia del teorema más general 3, que demostraremos después. Observemos que cabe dar otra interpretación al problema B.

Se dispone de m materias primas de utilización múltiple, en la proporción $p_1 : p_2 : \cdots : p_m$. Existen r_i procedimientos tecnológicos para tratar la materia prima $(i)(i = 1, \cdots, m)$; mediante el procedimiento (s) $(s = 1, \cdots, r_i)$, de p_1 unidades de la materia prima i, se obtienen $a_{i1}^s, a_{i2}^s, \cdots, a_{in}^s$ unidades de productos correspondientes. Un conjunto proporcional consiste en $k_1, k_2, \cdots, k_n$ unidades de productos $(1), (2), .., (n)$. Se trata de encontrar el plan $\pi = \{h_{is}\}$ [los valores h_{is} designan la parte de materia i disponible a la que se aplica el procedimiento (s)] para el que, a partir de una proporción consistente en $p_1, p_2, \cdots, p_m$ unidades de materias primas $(1), (2), \cdots, (m)$, se obtenga una cantidad máxima de conjuntos proporcionales o lo que es lo mismo, para el que se obtenga un conjunto completo de productos a partir de un valor mínimo de series de materias primas.

Se encuentran regularmente estos tipos de problemas en diversos sectores de la producción (siderurgia, industria maderera, industria química, del petróleo, de metales no férreos, etc.). Un ejemplo característico lo hallamos en el corte racional de materiales (chapas, perfiles laminados, tubos, cortes de la madera; cf. [1,5,6]).

En el caso particular en que

$$r_i = n(i = 1, \cdots, m), \quad a_{ij}^s = \begin{cases} a_{ij}, & \text{si} \quad s = j, \\ 0, & \text{si} \quad s \neq j \end{cases}$$

(en cada proceso tecnológico no se obtiene más que un solo producto por materia prima), es evidente que el problema B se reduce al problema A. En los casos particulares en que $m = 1$ (no hay más que una única clase de materia prima) nos encontramos con el siguiente problema:

Problema C: Dados los valores no negativos

$$\{a_j^*\}(s = 1, ..., r; j = 1, ..., n) \quad k_j > 0 \quad (j = 1, ..., n)$$

para los cuales

$$\max_{1 \leqslant s \leqslant r} a_j^s > 0 \, (j = 1, \cdots, n).$$

Se trata de determinar el vector (*plan*) $\pi = (h_1, \cdots, h_r)$ que satisfaga las siguientes condiciones:

1) $$h_s \geqslant 0 (s = 1, \cdots, r)$$

2) $$\sum_{i=1}^{r} h_t = 1;$$

3) y tal que el valor de

$$\mu(\pi) = \min_{1 \leqslant 1 \leqslant n} \frac{x_j^\pi}{k_j}$$

en

$$x_j^\pi = \sum_{s=1}^{r} a_j^s h_s (j = 1, \cdots, n)$$

sea máximo.

Analizaremos este problema con bastante amplitud, pero antes examinaremos como ejemplo el problema auxiliar C', en que como incógnitas además de los niveles de empleo $h_1, \cdots, h_r$ de los diferentes pro-

cedimientos, figuran los procedimientos excedentarios (en relación con la proporción deseada) para cada producto $h_{r+1}, \cdots, h_{r+n}$ puede ser que en un plan óptimo sea preciso prever tales excedentes.

Problema C′: Con los datos del problema C, encontrar el vector $\bar{\pi} = (h_1, \cdots, h_r \;\; h_{r+1}, \cdots, h_{r+n})$, que satisfaga las siguientes condiciones:

1) $$h_s \geqslant 0 (s = 1, \cdots, r+n);$$

2) $$\sum_{s=1}^{r} h_s = 1$$

3) $$\frac{x_1^{\bar{\pi}}}{k_1} = \frac{x_2^{\bar{\pi}}}{k_2} = \cdots = \frac{x_n^{\bar{\pi}}}{k_n} \tag{4}$$

en que

$$x_j^{\pi} = \sum_{s=1}^{r} a_j^s h_s - h_{r+j} (j = 1, \cdots, n);$$

4) el valor $\mu(\bar{\pi})$ de (4) es máximo.

El vector hallado es un vector óptimo; el vector es *realizable* si satisface las condiciones 1) y 2) y de *proporción* si satisface las condiciones 1)-3).

Sin dificultad puede verse que los problemas C y $\boldsymbol{C'}$ son equivalentes. En efecto, es evidente que el plan $\pi = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$ no es óptimo en el problema C, más que cuando el vector

$$\bar{\pi} = (h_1, \cdots, h_r, h_{r+1}, \cdots, h_{r+n})$$

definido por las r primeras componentes del vector π y cuyas n últimas componentes vienen definidas por las ecuaciones del tipo

$$h_{r+j} = x_j^{\pi} - k_j \mu(\pi) \quad (j = 1, \cdots, n),$$

es óptimo en el problema C'; en cuyo caso $\mu(\bar{\pi}) = \mu(\pi)$. Para aclarar el significado geométrico del problema C', consideraremos un espacio R_n de n dimensiones, cuyos elementos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ los denominaremos indiferentemente puntos a vectores. A cada vector realizable corresponde el punto:

$$x(\bar{\pi}) = \left(x_1^{\bar{\pi}}, x_2^{\bar{\pi}}, \cdots, x_n^{\bar{\pi}}\right) = \sum_{s=1}^{r} h_s a^s + \sum_{j=1}^{n} h_{r+j} e^j \in R_n, \tag{5}$$

en que $a^t = \left(a_1^z, a_2^z, \cdots, a_n^s\right)$ son los puntos que caracterizan los procedimientos tecnológicos de que se dispone y:

$$e^j = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{j-1}, -1, 0, \cdots, 0)$$

son vectores unitarios sobre los ejes de coordenadas correspondientes. Se ve fácilmente que los puntos (5) que representan el conjunto de vectores realizables $\bar{\pi}$, están contenidos en el interior del poliedro convexo cerrado M formado por los puntos $a^s (s = 1, \cdots, r)$ y el hiperoctante negativo. El conjunto de los vectores de proporción está constituido por los puntos $x(\pi)$ del eje[5]

$$Y = \{y / y = \lambda z, -\infty < \lambda < +\infty\},$$

[5]Esta notación significa que Y está constituida por el conjunto de puntos y del tipo $y = \delta z$, en que λ es un número real cualquiera

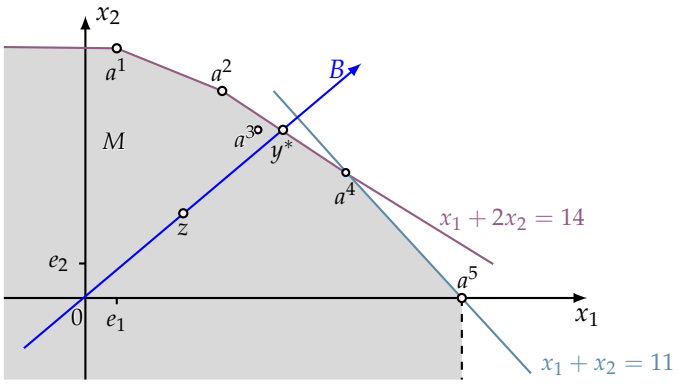

Figura 1

en que $z = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ es el vector que caracteriza la proporción de la producción exigida. El valor de $\mu(\bar{\pi})$ (escala de producción) es, pues, igual a λ. Es pues evidente que el vector óptimo realizable no puede ser más que el que corresponde al punto límite de intersección del eje Y y del poliedro convexo M, es decir, el punto $y^* = \lambda^* z$, en que

$$\lambda^* = \max_{\lambda z \in M} \lambda$$

El poligono M, el eje Y y el punto y^* representados en la figura 1 corresponden los siguientes datos numéricos:

$$n = 2;\ r = 5;\ a^1 = (1;6);\ a^2 = (1;6);\ a^2 = (4,5);\ a^3 = (5,4);\ a^4 = (8,3);\ a^5 = (11,0);\ z = (3,2)$$

El punto y^* está situado en el borde del poliedro M. En consecuencia, existe (según el teorema muy conocido en la geometría de los espacios n-dimensionales) un hiperplano H de apoyo del poliedro M, que pasa por el punto y^* (c.f, por ejemplo, A. D. Aleksandrov, *Poliedros Convexos*, 1950). Sea,

$$(c, x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = d \tag{6}$$

en que[6]

$$\max_{x \in M} (c, x) = (c, y^*) = d$$

la ecuación de este hiperplano. Se comprueba con facilidad que en la ecuación (6) los coeficientes de las coordenadas del punto x satisfacen la condición a). (ver Teorema 1). Sea $\bar{\pi} = (h_1, h_2, \cdots, h_{r+n})$-el vector óptimo. Entonces se tiene:

$$\text{Sea } \bar{\pi} = (h_1, h_2, \cdots, h_{r+n}\ (c, y^*) = \left(c, \sum_{s=1}^{r} h_s a^s + \sum_{j=1}^{n} h_{r+j} e^j\right) = \sum_{s=1}^{r} h_s\,(c, a^s) + \sum_{j=1}^{n} h_{r+j}\left(c, e^j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max\nolimits_{1 \leqslant s < r} (c, a^s) \sum_{s=1}^{r} h_s - \sum_{j=1}^{n} h_{r+j} c_j \leqslant d$$

[6]De no ser así puede obtenerse esta condición cambiando el signo de todos los coeficientes de la ecuación (6)

de donde se deduce:

$$\sum c_j a_j^s = (c, a^s) = \max_{1 \leqslant t \leqslant r} (c, a^t) = \max_{1 \leqslant t \leqslant r} \sum c_i a_j^t = d, \text{ si } h_s > 0 \tag{b'}$$

$$c_j = 0, \quad \text{si} \quad h_{r+j} > 0 \tag{c'}$$

Inversamente, si para un vector de proporción π, los valores $c_1 c_2, \cdots, c_n$ que satisfacen la condición a) satisfacen también las condiciones b') y c'), la ecuación (6) define un hiperplano de apoyo del poliedro M que pasa por el punto $x(\bar{\pi})$. En consecuencia, en este caso, $x(\bar{\pi}) = y^*$, y el vector $\bar{\pi}$ es, por tanto, un vector óptimo. Con ello ha quedado demostrado el teorema.

Teorema 2' Para que el vector de proporción $\bar{\pi} = (h_1, \cdots, h_r, h_{r+1}, \cdots, h_{r+n})$ sea óptimo, es necesario y suficiente que exista un sistema de multiplicadores $c_1, c_2, \cdots, c_n$ que satisfaga las condiciones a), $b')\, y\, (c')$.

Teniendo en cuenta la conexión entre los problemas C y C' puede demostrarse fácilmente el teorema $2'$ para el caso particular en que $m = 1$.

Nota 5: De la interpretación geométrica realizada, se deduce claramente que en el problema C siempre hay un vector óptimo (plan) y un sistema de multiplicadores (evaluaciones o.d.) correspondiente, pero que dichos componentes son siempre determinados de una forma unívoca. En efecto, si el punto y^* admite varias representaciones de la forma (5), significa que y^* se halla en el límite de un poliedro cuyo número de dimensiones es inferior a $n - 1$, que más no varía los planes óptimos. Y finalmente, que los vectores no se hallan definidos de una manera unívoca (es decir, que por el punto $y*$ pasan varios planos de apoyo M). Sin embargo, los multiplicadores relativos a uno de los planes óptimos se adaptan a todos los demás.

El problema fundamental de la planificación de la producción ([8])

Vamos ahora a abordar el problema más general que se plantea en el capitulo II.

Consideremos una producción en la que participan N bienes (factores de la producción, materias primas, productos terminados e intermedios). Se dispone de r procedimientos tecnológicos realizables (modos de organización de la prodocción). Cada uno de estos procedimientos se caracteriza por un vector

$$a^s = (a_1^s, a_2^s, \cdots, a_N^s) \quad (s = 1, \cdots, r),$$

cuyos componentes representan la producción de los diversos bienes mediante la utilización del procedimiento considerado durante un período determinado que se toma como unidad. Los componentes negativos corresponden a costes, es decir, uso de factores. El plan de organización de la producción se define por la elección del vector $\pi = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$ cuyos componentes no negativos nos indican la intensidad de utilización de los diferentes métodos. Para el plan $\pi = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$ se producen los diversos bienes en las cantidades

$$x_i^\pi = \sum_{s=1}^{r} a_i^s h_s \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{7}$$

(los bienes para los que $x_i \pi < 0$ se gastan, es decir, se emplean, en la cuantía de $\left|x_i^\pi\right|$).

Cuando se trata de establecer el plan de producción, junto a los procedimientos tecnológicos, hay que tener en cuenta los recursos disponibles y la proporción establecida de producción. Estas condiciones suplementarias pueden determinarse de diferentes maneras. Aquí sólo vamos a considerar una de las diversas formas posibles; sin embargo, el resultado fundamental relativo a la existencia de un sistema de evalu-

aciones o. d. para todos los bienes, ligado al plan óptimo, también sería válido si estas condiciones se establecieran de otra forma (ver nota 7).

Puede ser necesario obtener la producción máxima en algunos bienes (ciertos productos finales), respetando la producción dada, mientras que en otros no deben superarse ciertos límites: $x_i \geqslant\geqslant b_i$, en que los valores b_i son números reales determinados (los valores positivos corresponden a los productos terminados cuyas necesidades están bien definidas; para los productos intermedios cuyos gastos son iguales a la producción, se tiene $b_6 = 0$; los valores de b_6 negativos corresponden a los factores de producción y a las diferentes materias primas cuyos gastos no deben superar los recursos $|b_i|$). Con ello llegamos al problema siguiente.

Problema D: Dados los números reales

$$\begin{aligned} &a_i^s \quad (i = 1, \cdots, N;\ s = 1, \cdots, r), \\ &b_i \quad (i = 1, \cdots, m), \\ &k_j \quad (j = 1, \cdots, n;\ n = N - m), \end{aligned}$$

se requiere determinar el vector (plan) $\pi = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$ a partir de las condiciones

(1) $$h_s \geq 0 \quad (s = 1, \cdots, r);$$

(2) $$x_i^\pi \geq b_i \quad (i = 1, \cdots, m);$$

(3) la cantidad $\mu(\pi) = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \dfrac{x_{m+j}^\pi}{k_j}$

para que alcance su valor máximo (aquí y en las condiciones anteriores, las cantidades x_i^π están definidas por (7)).

Un plan π, que satisface las condiciones (1) y (2), se denomina *factible*, y uno que satisface las condiciones (1-3) es *óptimo*.

Este problema puede considerarse como un modelo matemático de la planificación actual (a corto plazo), del cual los problemas anteriores son claramente casos especiales. Por ejemplo, en el Problema B hay m factores de producción, n productos finales y

$$r = \sum_{i=1}^{m} r_i$$

métodos técnicos, por cada uno de los cuales se utiliza una unidad del respectivo factor (uso de una planta, fábrica o máquina) y se produce un cierto conjunto de productos; los recursos de cada factor aquí son iguales a 1, y por lo tanto, $b_i = -1$ (para $i = 1, \cdots, m$). Los problemas considerados a continuación también conducen al Problema D. Por lo tanto, este último se llama el problema básico de la planificación de la producción.

Los siguientes teoremas dan las propiedades de un plan óptimo y las condiciones para su existencia.

Teorema 3. (ver Conclusión 12, p. 49) Para que un plan factible $\pi = (h_1, \cdots, h_r)$ sea óptimo, es necesario que existan multiplicadores $c_1, c_2, \cdots, c_N$ (evaluaciones o.d. para todos los elementos) tales que:

(a) $$c_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, N), \quad \max_{1 \leq j \leq n} c_{m+j} > 0$$

(estas evaluaciones son no negativas, al menos uno de los productos incluidos en el conjunto tiene una evaluación positiva);

(b)
$$\sum_{i=1}^{N} c_i a_i^s \leq 0, \quad (s = 1, \cdots, r)$$

(para cada método técnico, la evaluación del producto no puede exceder la evaluación total de los ingredientes utilizados);

(c)
$$\sum_{i=1}^{N} c_i a_i^s = 0, \quad \text{si } h_s > 0$$

(para los métodos utilizados, la evaluación de los productos es igual a la evaluación de los elementos utilizados, se observa el principio de rentabilidad);

(d)
$$c_i = 0, \quad \text{si } x_i^\pi > b_i \quad (1 \leq i \leq m)$$
$$\text{o } x_i^\pi > k_{i-m}\mu(\pi) \quad (m+1 \leq i \leq N)$$

(para los factores de producción que no limitan la producción y para productos producidos en exceso, las respectivas valoraciones son iguales a cero)

Teorema 4. Para la existencia de un plan óptimo es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

(α) Existe un plan factible π.

(β) No existe un plan π (satisfaciendo la condición (1)) para el cual

$$x_i^\pi \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m); \quad x_{m+j}^\pi > 0 \quad (j = 1, \cdots, n).$$

Nota 6. La condición (β), que indica que no existe un plan en el cual ciertos elementos se produzcan (en cantidades positivas) sin ningún tipo de gasto, está claramente siempre satisfecha en problemas prácticos. La condición (α), en términos generales, podría no cumplirse. La violación de esta condición indica que, con los recursos disponibles en una base de producción dada, ni siquiera los primeros m elementos pueden producirse en las cantidades necesarias. Sin embargo, si todos los números $b_i \leq 0$, la condición (α) se cumple necesariamente.

Nota 7. El Teorema 3 se refiere al Problema D, en el cual los recursos disponibles y la variedad de productos requeridos se tuvieron en cuenta de manera definida. Sin embargo, para cualquier definición razonable de optimalidad, el plan π claramente no es óptimo si existe un plan π' según el cual todos los elementos se producen en mayores cantidades (o donde los recursos disponibles se utilizan en cantidades menores), es decir,

$$x_i^\pi < x_i^{\pi^*} \quad (i = 1, \cdots, N).$$

Esta propiedad es suficiente para garantizar que un plan óptimo esté asociado con un cierto sistema de valoraciones no negativas que satisfacen las condiciones (b) y (c).

Nota 8. En el caso general, las valoraciones de todos los ingredientes son necesarias para caracterizar un plan óptimo en el Problema D. Sin embargo, si cada método técnico involucra solo uno de los primeros m elementos (o uno de los últimos n elementos), entonces un plan óptimo puede especificarse en términos de las valoraciones solo de los últimos n elementos. Encontramos esta situación en los Problemas A, B y C.

Nota 9. El interés práctico se proporciona cuando la aplicación de ciertos métodos técnicos en el Problema D está limitada, y los únicos planes permitidos son aquellos para los cuales $\pi = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$, en los cuales

$$h_s \leq q_s \quad (s = 1, \cdots, r_1; \quad r_1 \leq r).$$

Donde los q_3 son números positivos dados. Este caso puede reducirse formalmente al caso básico con facilidad (es suficiente introducir las limitaciones en los métodos técnicos como recursos adicionales). Sin embargo, el problema también puede tratarse sin tal reducción. Sin embargo, es cierto que en el Teorema 3, que especifica un plan óptimo, la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{N} c_i a_i^* \leq 0$$

debe asumirse para aquellos métodos limitados que se están utilizando completamente ($h_s = q_s$).

Nota 10. En la literatura extranjera, el caso especial del Problema D, en el cual $n = 1$ (ver [9, 10]), generalmente se considera como el problema fundamental de planificación lineal. El siguiente problema servirá para ilustrar este caso.

Problema E: Existen m tipos de materia prima en cantidades de $b_1, b_2, \cdots, b_m$ unidades. A partir de esta materia prima, se pueden producir r productos diferentes. El precio de una unidad del producto (s), $(s = 1, \cdots, r)$, es a_n, y se gastan $a_1^s, a_2^s, \cdots, a_m^s$ unidades del respectivo tipo de materia prima en él. Se requiere seleccionar una cantidad de productos de varios tipos de manera que, como conjunto, puedan fabricarse a partir de la materia prima disponible y para que su valor total sea máximo. En otras palabras, se debe encontrar un vector (o plan) $\pi = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$ con las siguientes condiciones:

(1) $h_s \geq 0$ para $s = 1, \cdots, r$;

(2)
$$\sum_{i=1}^{r} a_i^s h_i \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, \cdots, m$$

(3) La cantidad $\mu(\pi) = \sum_{n=1}^{n} a_n h_n$ debe maximizarse.

Para clarificar el significado geométrico del Problema D y demostrar los teoremas dados anteriormente, consideraremos los puntos en el espacio N-dimensional R_s de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a^* &= (a_1^*, a_2^*, \cdots, a_s^*) \quad (s = 1, \cdots, r), \\ e &= (\underbrace{0, \cdots, 0}_{i-1}, -1, 0, \cdots, 0) \quad (i = 1, \cdots, N), \\ y^0 &= (b_1, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0), \\ z &= (0, \cdots, 0, k_1, \cdots, k_m). \end{aligned}$$

Sea

$$K = \left(x \mid x = \sum_{i=1}^{r} h_s a^2 + \sum_{i=1}^{N} h_{r+i} e^i; \quad h_s \geq 0, \quad s = 1, \ldots, r+N \right)$$ [7]

[7] Esta expresión indica que K es un conjunto de puntos x, pertenecientes al espacio $\mathbb{R}^N$, que pueden representarse en la forma dada, donde $h_s \geq 0$ son números no negativos arbitrarios.

un cono poliédrico convexo, con vértice en el origen de las coordenadas, que está generado por los puntos a_s $(s = 1, \ldots, r)$ y e_i $(i = 1, \ldots, N)$. Y sea

$$Y = \left\{ y \mid y = y^0 + \lambda z; \quad -\infty < \lambda < +\infty \right\}$$

una recta que pasa por los puntos $y^\circ, y^0 + z$, dirigida hacia el lado de incremento de λ.

Para cada plan factible $\pi = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, el punto

(8)

$$y^\circ + \mu(\pi)z = \sum_{i=1}^{r} h_s a^s + \sum_{i=1}^{N} h_{r+i} e^i,$$

donde

$$\begin{aligned} h_{r+i} &= x_i^* - b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ h_{,+m+j} &= x_{m+j}^* - k_j j(\pi) \quad (j = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{9}$$

claramente pertenece al cono K. Recíprocamente, si el punto $y^\circ + \lambda z \in K$, existe un plan factible π para el cual la cantidad $\mu(\pi) \geq \lambda$.

Por lo tanto, es evidente que el Problema D se reduce esencialmente al estudio de la intersección del eje y con el cono K. Si esta intersección está vacía, o contiene el punto $y^0 + \lambda z$, no importa cuán grande sea λ, entonces en este problema no existe un plan óptimo. Sin embargo, si $Y \cap K \neq \Lambda$ (Λ denota el conjunto vacío) y si

$$\lambda^* = \sup_{y^* + \text{en} \in K^2} \lambda < +\infty,$$

entonces existen planes óptimos; estos planes óptimos comprenden solo aquellos planes factibles π, para los cuales el punto (8) coincide con el punto extremo de la intersección de la recta y y el cono K, es decir, con el punto $y^* = y^0 + x^* z$.

A través del punto y^* es posible trazar un hiperplano de soporte H para el cono K que no contiene puntos de la recta y que no sean y^*. Sea la ecuación de este hiperplano

$$(c, x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N = 0, \tag{10}$$

donde

$$\max_{x \in K} (c, x) = (c, y^*) = 0.$$

Entonces, como se puede mostrar fácilmente, los números $c_1, c_2, \ldots, c_N$ (coeficientes de las variables en la ecuación (10)), satisfacen las condiciones (a) y (b) del Teorema 3, y las condiciones (c) y (d) de este teorema también se cumplen para cada plan óptimo (es decir, para cualquier plan tal que $y^0 + \mu(\pi)z = y^*$).

Por otro lado, si para un plan factible dado π existen multiplicadores $c_1, c_2, \ldots, c_N$ que cumplen las condiciones (a-d), entonces el hiperplano H, determinado por (10), es un hiperplano de soporte del cono K e interseca la recta y en el punto $y^0 + \mu(\pi)z$. De aquí se deduce que $y^0 + \mu(\pi)z = y^*$ y, en consecuencia, que el plan π es óptimo.

Así se ha demostrado el Teorema 3, y de él se siguen, en particular, los Teoremas 1 y 2, que se dieron anteriormente sin una prueba completa.

Como hemos visto, para la existencia de un plan óptimo, es necesario y suficiente que las condiciones

$$Y \cap K \neq \Lambda,$$
$$\lambda^* = \sup_{y^0+\lambda z \in K} \lambda < +\infty.$$

se cumplen. Esta última, como se puede comprobar fácilmente, es equivalente a las condiciones del Teorema 4.

Mediante la interpretación geométrica anterior, también es fácil demostrar la Nota 7, que es de fundamental importancia.

Relación con las matrices *input-output* de Leontief

Vamos a detenernos para considerar un problema particular en la planificación de la producción.

Supongamos que hay n productos y un factor de producción (trabajo). Los métodos técnicos son tales que solo se produce un producto por cada uno de ellos, mientras que otros productos y el factor de producción se utilizan completamente. El suministro del factor de producción está limitado. Se asume que existe un plan mediante el cual todos los productos se producen en cantidades positivas (solo se consume el factor de producción). En este caso:
(1) El problema del plan óptimo (plan D) es soluble para cualquier conjunto de productos (es decir, para cualquier conjunto de números $k_j \ldots, 0, j = 1, \ldots, n$).
(2) La colección de métodos técnicos utilizados en el plan óptimo y los valores de los multiplicadores (es decir, valoraciones) son independientes de los recursos del factor de producción disponible y del conjunto requerido de productos.

En el caso considerado aquí, los métodos técnicos se caracterizan por los vectores

$$a^{js} = \left(a_0^{js}, a_1^{js}, \ldots, a_n^{js}\right) \quad \left(j = 1, \ldots, n; s = 1, \ldots, r_j\right),$$
$$a_0^{js} < 0, \quad a_j^{js} > 0, \quad a_l^{js} \leqq 0, \quad \text{si} \quad l \neq j.$$

donde

$$a_0^{js} < 0, \quad a_j^{js} > 0, \quad a_l^{js} \leqq 0, \quad \text{si} \quad l \neq j.$$

El plan se determina en términos de una matriz

$$\pi = \left\|h_{js}\right\| \quad \left(j = 1, \ldots, n; s = 1, \ldots, r_j\right),$$

cuyos elementos indican el nivel de aplicación de los diversos métodos. Se busca un plan óptimo a partir de las condiciones

(1) $$h_{js} \geqq 0 \quad \left(j = 1, \ldots, n; s = 1, \ldots, r_j\right)$$

(2) $$x_0^{\pi} = \sum_{j,s} a_0^{js} h_{js} \geqq b_0$$

($-b_0$ denota la oferta disponible del factor de producción):

(3) la cantidad $\mu(\pi) = \min\limits_{1 \leqq l \leqq n} \dfrac{x_l^\pi}{k_l}$, donde $x_l^\pi = \sum\limits_{j,s} a_l^{js} h_{js}$

$(l = 1, \ldots, n)$, es un máximo (los números k_l caracterizan el surtido requerido de productos).

Para cada producto $(v)(v = 1, \ldots, n)$ consideramos un plan $\pi^v = \left\| h_{js}^v \right\|$ (satisfaciendo la condición (1)), para el cual la entrada del factor de producción no excede una unidad $\left(x_0^{\pi v} \geqq -1\right)$, y para el cual los productos se producen en cantidades no negativas $\left(x_l^{\pi r} \geqq 0, l = 1, \ldots, n\right)$, el producto (v) siendo producido en cantidad máxima $(x_v^{nv} = \max)$. Afirmamos que para el plan π^v

$$x_0^{\pi v} = -1, \quad x_l^{\pi v} = 0, \quad \text{si } l \neq v.$$

De hecho, si $x_0^{\pi v} > -1$, el volumen de producción del producto (v) puede aumentarse al incluir parcialmente un plan en el cual todos los productos se producen en cantidades positivas; sin embargo, si, para cierto $l_0 \neq v$, $x_{l_0}^{\pi v} > 0$, entonces también es posible incluir el plan mencionado a expensas de reducir uno de los números $h_{10s^*}^v$

No es difícil verificar que, cualquiera que sean los números $k_j > 0 (j = 1, \ldots, n)$, las cantidades

$$c_0, \quad c_1 = \frac{c_0}{x_1^{\pi 1}}, \quad c_2 = \frac{c_0}{x_2^{\pi_2}}, \ldots, c_n = \frac{c_0}{x_n^{\pi^n}},$$

donde c_0 es un número positivo arbitrario, representan un sistema de valoraciones o.d., y el plan $\pi = \left\| h_{js} \right\|$, en el cual

$$h_{js} = \frac{-b_0 \sum\limits_{v=1}^{n} c_v k_v h_{js}^v}{\sum\limits_{v=1}^{n} c_v k_v} \left(j = 1, \ldots, n; s = 1, \ldots, r_j\right),$$

es óptimo. De esta proposición, se siguen (1) y (2). Destacamos el importante caso especial cuando, para cada producto (j) $(j = 1, \ldots, n)$, solo hay un proceso de producción, caracterizado por el vector

$$a^j = \left(a_0^j, a_1^j, \ldots, a_n^j\right); \quad a_0^j < 0, \quad a_j^j > 0, \quad a_i^j \leqq 0, \quad \text{si} \quad l \neq j.$$

Aquí, un plan óptimo utiliza claramente todos los métodos. Por lo tanto, el sistema apropiado de valoraciones se puede encontrar a partir de las ecuaciones simultáneas

$$\sum_{l=0}^{n} a_l^j c_l = 0 \quad (j = 1, \ldots, n);$$

más exactamente, a partir de estas ecuaciones simultáneas, las valoraciones para todos los productos pueden expresarse en términos de c_0 (la valoración de una unidad de trabajo).

Este último caso corresponde al modelo de producción abierta de Leontief[8][9], que se utiliza con frecuencia en el análisis económico. Sin embargo, es importante señalar que este modelo es solo una aproximación muy rudimentaria de las condiciones reales de producción que determinan el plan de producción actual. De hecho:

(1) En problemas reales, es necesario tener en cuenta muchos factores además del trabajo, que están disponibles en cantidades limitadas, en particular, fuentes naturales útiles y especialmente ciertas capaci-

[8]Claramente estas ecuaciones pueden ser resueltas inmediatamente

[9]Para el modelo de Leontief, puede ver, por ejemplo, [9] y el último artículo en [10]

dades de producción. Además, dado que generalmente hay varias categorías de trabajo, este tampoco debe tratarse como un único factor.

(2) La producción de múltiples productos que no están incluidos en el esquema anterior ocurre constantemente.

(3) En las condiciones reales de la producción moderna, existen muchos métodos para fabricar un producto en particular, y la aplicación de los diversos métodos utilizados destaca en particular las limitaciones mencionadas en (1).

El modelo de Leontief parece útil para compilar matrices de relaciones intersectoriales en las que los coeficientes a_{ij} representan los costos de un producto de un tipo dado en términos de los insumos de productos de otros sectores. Aunque la construcción de tales matrices de relaciones y la obtención de gastos totales a partir de ellas son de interés especial, este enfoque puede no considerarse suficientemente satisfactorio para calcular las valoraciones de productos. De hecho, en lugar de utilizar métodos reales de producción, aquí se emplean promedios generales y los resultados obtenidos dependen esencialmente de los métodos elegidos (o de la agregación). Por lo tanto, no hay justificación para pensar que las valoraciones de productos obtenidas de esta manera proporcionarán relaciones equivalentes realizables, y así estas valoraciones no pueden utilizarse directamente en el análisis de la planificación económica. Su principal deficiencia es que no tienen en cuenta las limitaciones mencionadas en (1) y las restricciones en los gastos indirectos asociados con ellas.

El problema del transporte

En el caso más simple, este problema consiste en lo siguiente.

Problema F[10]**:** Existen m puntos conectados por una red de vías férreas constituida por r comunicaciones. A lo largo de la sección $(s)(s = 1, \ldots, r)$ de la red, los bienes pueden ser transportados desde el punto i_s hasta el punto j_s; los costos por transportar una unidad de bienes (por ejemplo, un vagón) son a_s (en particular, la cantidad a_s puede considerarse igual a la distancia entre los puntos i_s y j_s)). En cada punto $(i)(i = 1, \ldots, m)$ hay una demanda dada b_i para un solo tipo de producto (para puntos de demanda $b_i > 0$, para puntos de producción $b_i < 0$, para otros puntos $b_i = 0$), y

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$$

(las cantidades totales de producción y demanda son iguales). El plan de transporte está determinado por la elección de un vector $\pi = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$, cuyos componentes indican el volumen de transporte en cada sección del sistema. El problema es encontrar un plan óptimo, que satisfaga las condiciones (1)

$$h_s \geqq 0 \quad (s = 1, \ldots, r);$$
$$\sum_{i_s=i} h_s - \sum_{i_s=i} h_s = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

[10]Métodos especiales para resolver este problema se consideraron en [2]; un análisis matemático y métodos generales para resolver este problema y algunos conectados con la planificación de transporte (Problema G en particular) se trabajaron en [3, 4] y tambien en [9]

(cada punto obtiene la cantidad neta requerida del producto): (3) la cantidad

$$z = \sum_{s=1}^{r} a_s h_s$$

debe ser mínima (se busca minimizar el costo total del transporte; por ejemplo, se busca minimizar los kilómetros de vagón).

No es difícil ver que el problema dado es un caso particular del problema básico de planificación de la producción. De hecho, se puede suponer que en este caso hay $(m+1)$ elementos; los primeros m de estos son los bienes considerados, situados en varios puntos, y el último corresponde a los costos de transporte. Los métodos técnicos factibles se caracterizan por los vectores

$$a^s = \left(a_1^s, a_2^s, \ldots, a_{m+1}^s\right) \quad (s = 1, \ldots, r),$$

donde $a_{m+1}^s = -a_s, a_i^s = 1$ para $i = j_s, a = s-1$ para $i = i_s$, y $a_i^s = 0$ para los demás i 's.

Con base en el Teorema 4, se puede concluir fácilmente que un plan óptimo en este problema siempre existe. El plan está caracterizado por el Teorema 3, que aquí se reduce a lo siguiente.

Teorema 5. Para que un plan $\pi = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$ (que satisface las condiciones (1) y (2)) sea óptimo es necesario y suficiente que existan $c_1, c_2, \cdots, c_m$ tal que:

(a) $$c_{j_s} - c_{i_s} \leq a_s, \quad (s = 1, \cdots, r);$$

(b) $$c_{j_s} - c_{i_s} = a_s \quad \text{si } h_s \neq 0$$

Nota 11. Los números c_i, que aparecen en el Teorema 5, se llaman potenciales de los diversos puntos. La diferencia de potencial muestra cuánto más caro es un unitario del producto dado en un punto que en otro.

Cuando se planifica el transporte en la práctica, a veces es necesario tener en cuenta además la capacidad limitada de carga de las diversas secciones de la línea. Esto conduce a un problema más general.
Problema G: Según las condiciones del problema F, sólo resultan realizables los programas $\pi = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$ para los que se cumple la siguiente relación:

$$h_s \leq q_s, \quad (s = 1, \cdots, \mathring{}) \tag{2'}$$

Los valores a_i determinan la capacidad de tráfico de cada una de las diversas líneas.

En este caso, las características del programa óptimo vienen dadas por el siguiente teorema que deriva del teorema 2.

Teorema 6. Para que el plan $\pi : (h_1, h_2, \ldots, h_r)$ que satisface las condiciones 1), 2) y 2'), sea óptimo, es necesario y suficiente que existan valores $c_1, c_2, \cdots, c_m, d_1, d_2, \cdots, d_r$ de manera que:

a) $c_{j_s} - c_{i_s} \leq a_s + d_s$ para $s = 1, \cdots, r$,

b) $c_{j_s} - c_{i_s} = a_s + d_s$ si $h_i > 0$,

c) $d_i \geq 0$, siendo $d_s = 0$ si $h_s < q_s$.

Nota 12. Los valores d_s representan la renta (evaluación locativa) de las diversas líneas de la red ferroviaria, por unidad de carga (por ejemplo, por vagón).

El problema de la producción compleja

Supongamos ahora que hay varias empresas, para cada una de las cuales se ha compilado un plan de trabajo óptimo. En otras palabras, consideraremos la solución simultánea de varios problemas básicos con ciertos elementos comunes. Naturalmente, surge la pregunta de si es posible aumentar la productividad general mediante la cooperación entre las empresas individuales o aisladas.

Si las empresas existentes están ubicadas en un punto o cerca unas de otras (de modo que se pueden ignorar los gastos de transporte), la respuesta a este problema se da por el siguiente teorema:

Teorema 7. Si no pueden establecerse evaluaciones comunes para todos los distintos factores de producción (materias primas, productos semielaborados y productos terminados; los bienes disponibles en lugares diferentes e inamovibles se consideran como bienes distintos) de manera que para cada empresa se verifique el principio de rentabilidad, puede incrementarse el volumen global de la producción mediante una modificación de los planes y a través de la cooperación de las distintas empresas aisladas. Por el contrario, si existen tales coincidencias, la producción no puede aumentar a través de dicha cooperación.

Este teorema se deduce del teorema 3 en el que el conjunto de todas las empresas se considera como una única empresa.

Nota 13. Puede enunciarse un teorema análogo si las empresas se hallan separadas por considerables distancias, es decir, si no cabe despreciar los gastos de transporte. En este caso, las evaluaciones de un mismo producto pueden diferir según los diversos puntos; pero las diferencias de evaluación no deben superar los gastos de transporte de dicho producto desde un punto a otro (habida cuenta de las evaluaciones locativas de las comunicaciones correspondientes) y estas diferencias deben ser iguales a dichos gastos si los transportes se efectúan realmente de acuerdo con el plan óptimo.

El Problema Dinámico

Mediante el problema básico de planificación de la producción considerado anteriormente, se puede analizar el problema más general, es decir, el de elaborar un plan de producción para un cierto período de tiempo dividido en una serie de intervalos, $t = 1, 2, \ldots, T$ (problema de planificación a largo plazo).

Un mismo producto (o factor), producido (o utilizado) en varios periodos de tiempo, se trata aquí como un elemento diferente. Por lo tanto, los métodos técnicos disponibles se caracterizan ahora mediante las matrices

$$a^2 = \|a_{it}^s\| \quad (i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T; s = 1, \ldots, r),$$

cuyos elementos muestran las cantidades de los diversos productos y factores producidos en diferentes intervalos de tiempo (los elementos negativos denotan insumos). Entre los métodos también se pueden incluir aquellos que se refieren a un solo período de tiempo (métodos que aparecieron en la compilación del plan actual). El progreso técnico en estos métodos se puede tener en cuenta mediante la conversión de los insumos para su aplicación en períodos posteriores y al indicar el período desde el cual se utiliza el método mejorado en particular, y así sucesivamente. Claramente, este tipo de datos iniciales es de naturaleza prognóstica y es inevitablemente bastante aproximado. Junto con otros factores, es conveniente introducir, como elementos especiales, algunas capacidades productivas particulares. Entre estas últimas se encuentran los factores reproducibles, y se contempla la posibilidad de su producción.

El concepto de un plan óptimo se puede introducir de varias maneras; por ejemplo, con recursos dados

para el primer período (ciertos recursos, como los naturales, pueden darse para todos los períodos) y con una demanda dada de productos finales (para cada período de tiempo), se requiere elaborar un plan en el que se mantengan los equilibrios, y la acumulación de la producción final de una composición especificada (o de una capacidad productiva definida) hasta el final del período de planificación sea máxima. Sin embargo, para cualquier definición natural de ser óptimo, un plan $\pi = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$ no es óptimo si existe un plan $\pi' = (h'_1, h'_2, \ldots, h_r)$ en el que todos los elementos se produzcan en mayores cantidades,

$$x^*_{ir} = \sum_{n=1}^{r} a^s_{ir} h_s < \sum_{s=1}^{r} a^s_{ir} h'_s = x^{\varepsilon'}_{ir}$$
$$(i = 1, \ldots, N; \quad t = 1, \ldots, T).$$

Esta propiedad resulta ser suficiente para que el plan óptimo π se asocie con un sistema de multiplicadores $\{c_{it}\}$ $(i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T)$ (de valoraciones para todos los productos y factores durante todo el período) tal que:

(a) $c_{it} \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T)$, y no todos los $c_{it} = 0$;

(b) $$\sum_{i,f} c_{it} a^s_{it} \leqq 0 \quad (s = 1, \ldots, r)$$

(c) $$\sum_{i,t} c_{\mathrm{it}}\, a^s_{it} = 0, \quad \text{si } h_s > 0$$

Los multiplicadores (valoraciones) pueden ser normalizados de manera natural. Por ejemplo, si

$$c_{it} = \lambda_t c'_{it} \quad (i = 1, \ldots, N; t = 1, \ldots, T),$$

las valoraciones c_{it} pueden elegirse de manera que satisfagan las condiciones

$$c'_{i_1 t} + c'_{i_2 t} + \ldots + c'_{i_n t} = 1 \quad (t = 1, \ldots, T),$$

o las valoraciones de cierto conjunto establecido de productos en cada intervalo de tiempo son iguales a 1. Al llevar a cabo esto, los lados izquierdos de las desigualdades y ecuaciones en las condiciones (b) y (c) se reemplazan por lo siguiente

$$\sum_{t=1}^{T} \lambda_t \sum_{i=1} c'_{it} a^s_{it} \quad (s = 1, \ldots, r),$$

es decir, al evaluar un método técnico de producción y gasto perteneciente a diferentes intervalos de tiempo, las valoraciones deben convertirse a un solo intervalo mediante multiplicadores λ_t.

La razón $\lambda_t / \lambda_{\mathrm{r}}$ es (para una unidad dada) un coeficiente de conversión para insumos en el período t al período t. En particular, la cantidad

$$\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} - 1 \right) = \frac{\lambda_t - \lambda_{t+1}}{\lambda_{t+1}}$$

da la eficiencia normal de la inversión de capital en la transición del período t al siguiente.

Las cantidades c_{it} caracterizan la dinámica de las valoraciones; son valoraciones de insumos y productos que se han convertido a un instante único de tiempo. Las cantidades c_i caracterizan la dinámica relativa de las valoraciones. En consecuencia, hay dos métodos para calcular la eficiencia de cierta inversión de capital (de un nuevo método de producción, calculado para un período largo): es decir, si los insumos y productos

durante los años de la inversión de capital están caracterizados por la matriz $\mid \bar{a}_{ir}$, entonces la cuestión de la utilidad de su aplicación se resuelve al determinar si la suma

$$\sum_{i_i,t} c_{it}\bar{a}_{it} = \sum_t \lambda_t \sum_i c'_{it}\bar{a}_{it}$$

es positiva o no. La primera expresión se calcula directamente según la dinámica de las valoraciones, y la segunda se calcula según la dinámica relativa seguida por una conversión de insumos en cada período a un período en particular (ver. Conclusiones 25 y 26).

Conclusión 25: *El plan óptimo de producción elaborado para una sucesión de períodos (plan de inversiones) se caracteriza por un sistema dinámico de evaluaciones, es decir, por un sistema de evaluaciones de todas las clases de producciones y de factores para cada período. Como regla general, estas evaluaciones varían tanto en valor absoluto como en valor relativo cuando se pasa de un período a otro. Pueden darse bajo dos formas: bien reducidas a un período, o bien bajo forma de evaluaciones relativas para cada período, con los coeficientes comunes de reducción a un período dado (lo que es equivalente al cálculo de la eficacia normal al pasar de cada período al siguiente). Según estas evaluaciones todos los procedimientos productivos utilizados (en el curso de períodos sucesivos) en el plan óptimo están "justificados", son (rentables) y los no utilizados tienen una rentabilidad inferior o a lo sumo igual a la justificada.*

Conclusión 26: *Si para un programa dado se ha determinado el sistema dinámico de evaluaciones que le caracteriza, para juzgar la utilidad de un procedimiento productivo en el curso de varios períodos, basta comparar la producción esperada en toda su duración con los gastos previstos por el plan realizando su reducción a un solo período, conforme al sistema dinámico de las evaluaciones. También se pueden calcular la producción y los gastos partiendo de las evaluaciones obtenidas para cada período, reduciendo los datos obtenidos a un mismo período según los coeficientes de reducción o las normas de eficacia. Cuando las evaluaciones relativas pueden suponerse constantes el cálculo se simplifica y se lleva a cabo simplemente a partir de las normas de eficacia y de las evaluaciones para un solo período*

El cálculo se simplifica si las valoraciones relativas no cambian con el tiempo. Entonces, es suficiente conocer las valoraciones en el tiempo inicial c'_{il} y los coeficientes de conversión λ_i; para evaluar un proceso es suficiente aplicar la segunda de las expresiones dadas anteriormente con c'_{it} reemplazado por c'_{il}.

Propiedades de las Valoraciones. Variación de un Plan

En el análisis del problema básico de planificación de la producción se elucidó su significado geométrico. En particular, se mostró que las valoraciones o.d. están dadas por los coeficientes de las variables en la ecuación del hiperplano H, que es un hiperplano de soporte del cono K, y que pasa por el punto límite y^* de la intersección de la recta y con este cono. Por lo tanto, en primer lugar, queda claro que las valoraciones o.d. son completamente realistas, es decir, están relacionadas con la situación (métodos técnicos disponibles, volúmenes de recursos, tarea de surtido) y cambian cuando la situación cambia (cf. Conclusión 6). De hecho, durante tales cambios, el cono de planes K y el eje de surtido y cambian, y con ellos también el hiperplano de soporte H.

Sin embargo, si excluimos casos especiales, cuando el punto y^* que corresponde al plan óptimo se encuentra en el límite del cono K de dimensiones menores que $N-1$, entonces, para cambios pequeños en la tarea de surtido y en los recursos, el punto extremo y^* permanece en el mismo límite; por lo tanto, las valoraciones o.d. no cambian. Para otros cambios pequeños (en los métodos) el cono K cambia ligeramente; esto conduce a cambios pequeños en las valoraciones o.d.

Así que las valoraciones o.d. poseen cierta estabilidad con respecto a los cambios en la situación (ver

Conclusión 7).

Conclusión 7: *Las evaluaciones o. d. poseen una cierta estabilidad, es decir, que para pequeñas modificaciones en las condiciones de los problemas (proporciones establecidas, número de empresas, capacidades de producción) en general las relaciones de las evaluaciones o. d. perma- necen invariables, o bien varían tan sólo ligeramente.*

Al cambiar del punto $y^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ al punto vecino $\bar{y}^* = (x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2, \ldots, x_N^* + \Delta x_N)$ en el mismo hiperplano de soporte, llegamos a un plan óptimo correspondiente a diferentes recursos y a una tarea de surtido diferente. Durante este cambio, como se ha notado, las valoraciones o.d. $c_1, c_2, \ldots, c_N$ no cambian: por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{N} c_i \left(x_i^* + \Delta x_i\right) = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \Delta x_i = 0$$

La última relación se llama, naturalmente, la ecuación de variación de un plan; especifica la condición para una sustitución equivalente de ciertos tipos de productos y factores de producción por otros que debe cumplirse al pasar de un plan óptimo dado a un plan óptimo ligeramente alterado y que, en general, es suficiente para la realización de este último. En particular, una unidad del ingrediente (i_1) puede ser reemplazada por c_{i1}/c_{i2} unidades del ingrediente (i_2). Cuando se utilizan otras valoraciones (diferentes de las valoraciones o.d.), dicha sustitución generalmente es imposible. Por lo tanto, está claro que las relaciones definidas por las valoraciones o.d. entre productos y factores de diferentes tipos son completamente realistas (ver Conclusión 8 y la Conclusión 13 más general).

Conclusión 8: *La relación de las evaluaciones o. d. es real, es decir, que según las equivalencias definidas por estas evaluaciones, puede reemplazarse realmente un cierto número de unidades de una producción por el número correspondiente de la otra o inversamente. De modo más exacto si para dos artículos la relación de las evaluaciones o. d. del trabajo para su fabricación es $m : n$, se puede introducir de modo general modificaciones en el plan de forma que se reduzca la cantidad del primer artículo es un número rn de unidades y aumente en rm unidades la cantidad del segundo artículo. Después de estas modificaciones el plan continúa siendo óptimo (para las proporciones establecidas modificadas)*

Conclusión 13: *Las evaluaciones objetivamente determinadas de los factores de producción son concretas, es decir, están definidas por el conjunto de condiciones (disponibilidad de estos factores, programa de producción, procedimientos productivos). En particular, la disminución de las disponibilidades de un factor o el aumento de la producción en las ramas en las que este factor se usa especialmente de una manera intensiva, entraña, de un modo general, el aumento de la evaluación o. d. de este factor. Para variaciones pequeñas de los datos, ordinariamente las evaluaciones o. d. no varían o varían muy poco (estabilidad). La relación de las evaluaciones o. d. de los factores de producción puede realizarse; es decir, que mediante el gasto suplementario de una cierta cantidad de uno de estos factores es posible obtener el ahorro de una cantidad equivalente (según la equivalencia definida por las evaluaciones o. d.) de otro factor (realidad de las evaluaciones o. d.)*

Las propiedades anteriores de las valoraciones o.d. y también la ecuación de variación conducen a muchas aplicaciones de estas valoraciones en varios problemas de ajustes en planes y de obtención de soluciones parciales separadas.

Nota 14. Hemos señalado que la solución al problema de eficiencia de algún nuevo método, caracterizado

por el vector $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_N)$, se determina según si la suma

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \bar{a}_i$$

es positiva o no. Sin embargo, esto se refiere solo al caso en el que el método puede aplicarse en cualquier nivel. Comúnmente ocurren métodos de producción que solo se pueden utilizar a un nivel dado (métodos o inversiones indivisibles). Al evaluar dicho método, se retiene la condición necesaria para su aplicación

$$\sum_{i} c_i \bar{a}_i \geqq 0$$

esta condición, sin embargo, puede no ser suficiente, ya que la inclusión de este método en el plan puede requerir variaciones que son mayores que las factibles. Por lo tanto, para resolver este problema, puede ser necesario reconsiderar el plan con la inclusión del nuevo método y comparar los productos e insumos del plan obtenido de esta manera con el plan original.

Renta y Alquiler en la Planificación Industrial

El análisis del problema básico de la planificación industrial llevado a cabo anteriormente ha demostrado que, en la aplicación de métodos para la planificación óptima a problemas concretos, resulta conveniente tener en cuenta otras formas de producción además de las usualmente consideradas en el análisis económico. Entre los insumos se pueden incluir, por ejemplo, el uso de tierra más fértil, el uso de espacio de producción, el alquiler de equipos escasos por un tiempo definido (además de su desgaste), el alquiler de recursos circulantes, entre otros. Si estos factores están disponibles en cantidades limitadas y se utilizan plenamente, reciben valoraciones positivas. Por lo tanto, su omisión en los cálculos económicos a menudo conduce a soluciones incorrectas. Se han presentado muchos ejemplos de este tipo en el texto principal del libro.

Así, para obtener soluciones correctas en cálculo económico, es necesario tener en cuenta las rentas (por el uso de condiciones naturales más favorables) y las valoraciones de alquiler (por el alquiler de equipos escasos). Los valores numéricos de estas cantidades se determinan junto con las otras valoraciones o.d.

Indicadores que Caracterizan la Operación de Fábricas

Consideraremos la posibilidad de utilizar valoraciones o.d. para construir indicadores estadístico-económicos que caractericen la operación de las fábricas.

En los modelos que se han estudiado, hubiera sido posible asumir que dentro de cada unidad de producción se incluye un cierto grupo de procesos que forman parte del plan general. En cada unidad de producción, se emplean ciertos factores y bienes fabricados por otras unidades de producción hasta cierto límite, y se producen ciertos bienes. La valoración total planificada de la producción y uso de un elemento de producción (teniendo en cuenta las valoraciones de rentas y alquiler según las valoraciones o.d. para todo el complejo) debe ser igual a cero.

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \tilde{x}_i^{\Pi} = 0$$

($\tilde{x}_i^{\Pi}$ son los volúmenes planificados de producción y de entrada en la unidad de producción bajo consideración). Sin embargo, mediante la reducción de insumos y aumentando las salidas en comparación con

el primer borrador del plan, la suma formada a partir de los datos reales puede, por lo general, dar como resultado un valor positivo. Su valor puede considerarse como un índice fundamental que caracteriza el valor de la contribución de la unidad de producción:

$$R = \sum_{i=1}^{N} c_i \bar{x}_i^{\Phi},$$

donde $\bar{x}_i^{\Phi}$ son los volúmenes reales de producción y uso. Este índice es similar al índice habitual de rentabilidad, pero difiere en que la producción se calcula ahora según las valoraciones o.d., mientras que entre los costos se incluyen la renta y la valoración del alquiler. Por lo tanto, los intentos de mejorar este índice deberían dar como resultado una reducción de insumos, un aumento en la producción de productos requeridos, un uso más completo e intenso de los equipos, y también la aplicación de métodos de producción más apropiados según las condiciones existentes. El uso de métodos que son inapropiados en las condiciones existentes (en particular, aquellos que fueron rechazados al elaborar el plan óptimo) resulta ser desventajoso y conduce a un empeoramiento del índice. Además del índice mencionado anteriormente, es necesario, obviamente, tener en cuenta (al evaluar la operación de una fábrica, así como en cálculos económicos) que la tarea planificada debe cumplir con respecto a su composición de productos e insumos.

Cálculo de los Costos Necesarios en Términos de Trabajo Promedio

Como hemos visto, con un plan óptimo se pueden obtener valoraciones o.d. definidas para los diferentes tipos de producto (dentro de los límites del sistema de producción considerado). El problema surge naturalmente en cuanto a si están en contradicción con la teoría del valor del trabajo, según la cual, bajo el socialismo también, el valor de los productos debe determinarse por el gasto socialmente necesario de trabajo.

El análisis de este problema muestra que la estructura de las valoraciones o.d. asociadas con un plan óptimo está en completa concordancia con la teoría del valor del trabajo; además, los métodos para encontrar estas valoraciones proporcionan un enfoque para calcular el gasto social completo de trabajo.

Cabe señalar que el problema de calcular el gasto social de trabajo en una sociedad socialista está lejos de ser simple, y en casos más complicados (como los que surgen constantemente en la producción moderna). Hay una falta de claridad completa en cuanto a lo que se debe entender por este gasto y cómo se debe proceder para calcularlo. Así, en varios procesos que pueden ser eficientes para obtener productos dados, los costos laborales reales (fácticos o planificados) son diferentes, pero el tiempo socialmente necesario debe ser el mismo. La producción de varios tipos de bienes está interconectada, sus costos son mutuamente dependientes y es necesario observar el principio de asignación de costos.

Nos parece que bajo condiciones de producción socialista planificada centralmente (al menos, en el caso de la industria estatal), de acuerdo con la teoría marxista del valor, se pueden tomar las siguientes premisas como puntos de partida para calcular los costos sociales: (a) se debe tener en cuenta el gasto total de trabajo social en un producto dado; (b) la fabricación del producto dado debe considerarse específica para un determinado estado de las fuerzas productivas; (c) se deben tener en cuenta los costos en el plan óptimo, es decir, los costos que son realmente necesarios para la sociedad; (d) el cálculo debe ser en términos de trabajo promedio, es decir, correspondiente a condiciones sociales promedio.

Sin abordar el problema de calcular los costos sociales en detalle, lo discutiremos en términos del modelo matemático de producción, que se considera en el Problema D.

Supondremos que el plan se está elaborando para un sistema de producción cerrado que fabrica sus productos de manera independiente (la consideración de un grupo de sistemas siempre permite reducir los asuntos a este caso). Bajo estas condiciones, los factores de producción en el sistema serán el trabajo y los factores que aumentan el poder productivo del trabajo (capacidades productivas, diversos tipos de equipos, fuentes naturales más favorables, y así sucesivamente), y en este caso, el trabajo es la única fuente de valor.

En un plan óptimo, supongamos que la entrada de trabajo directo es de $-x_1$ unidades[11], y que los costos de otros factores son $-x_2, -x_3, \ldots, -x_m$ ($x_1, x_2, \ldots, x_m$ son negativos), y que las cantidades de los productos que se están produciendo son $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+m}$, según sus tipos.

A cada tipo de producto le corresponde una valoración o.d. específica c_{m+j}. Por lo tanto, una valoración general para los productos sería (en unidades relativas)

$$\sum_{j=1}^{n} c_{m+j} x_{m+j}$$

y dado que toda esta producción resultó de $-x_1$ unidades de trabajo (promedio para el sistema dado),

$$\frac{-x_1}{\sum_{j=1}^{n} c_{m+j} x_{m+j}}$$

unidades de trabajo se gastan en una unidad relativa de producción. Según esto, una unidad de producto del tipo $(m+j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ evaluada como c_{m+j} unidades relativas, requiere una entrada de

$$\bar{c}_{m+j} = \frac{-x_1}{\sum_{j=1}^{m} c_{m+j} x_{m+j}} c_{m+j}$$

unidades de trabajo promedio (es claro que la cantidad $\bar{c}_{m+j}$ es independiente de la elección de la unidad relativa). Se deduce de esta expresión que las valoraciones o.d. c_{m+j} de la producción son proporcionales a los costos laborales $\bar{c}_{m+j}$, construidos de la manera descrita.

Mostraremos que los costos laborales, definidos de esta manera, para una unidad de producción corresponden de hecho a aquellos que se requieren para lograr esta producción en condiciones dadas.

Para ello, asumiremos que los recursos planificados del sistema se han incrementado en $-\Delta x_1$ unidades de trabajo ($\Delta x_1 < 0$). Para que las condiciones laborales permanezcan sin cambios por esto, es necesario asumir que los factores de producción que determinan estas condiciones reciben incrementos proporcionales,

$$-\Delta x_2 = -\frac{x_2}{x_1}\Delta x_1, \ldots, -\Delta x_m = -\frac{x_m}{x_1}\Delta x_1.$$

Dirigiendo estos medios hacia un aumento del producto del tipo $(m+j)$, obtenemos una cantidad adicional Δx_{m+j} del producto, mientras que para otros tipos de producto cuyo volumen de producción permanece sin cambios, $\Delta x_{m+1} = 0$ $(l \neq j)$. Como resultado, llegamos a un plan óptimo inalterado. La

[11] Estamos considerando un tipo de trabajo (trabajo simple) y asumimos que otros tipos (diferentes en calificaciones requeridas y en intensidad) se han convertido a este tipo.

ecuación variacional para el plan (ver (11), p. 287) da

$$c_1\Delta x_1 + c_2\frac{x_2}{x_1}\Delta x_1 + \ldots + c_m\frac{x_m}{x_1}\Delta x_1 + c_{m+j}\Delta x_{m+j} = 0.$$

Por lo tanto, el costo de producir una unidad del producto es

$$\frac{-\Delta x_1}{\Delta x_{m+j}} = \frac{x_1}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i}c_{m+j} = \frac{-x_1}{\sum\limits_{l=1}^{n} c_{m+1}x_{m+1}}c_{m+j} = \bar{c}_{m+j}$$

donde hemos tenido en cuenta que, en vista de la relación (c) (Teorema 3), para cada método realmente utilizado y, por lo tanto, también para el plan en su conjunto,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} c_{m+1}x_{m+1} = 0. \tag{11}$$

Por lo tanto, para una unidad de producto del tipo $(m+j)$ (en esta variación llegamos una vez más a un plan óptimo), se requieren $\bar{c}_{m+j}$ unidades de trabajo. Este resultado se debe al hecho de que se tiene en cuenta el cambio total en los costos en el grupo, relacionado con el aumento en la producción, teniendo en cuenta la redistribución de los medios. En esto, las magnitudes de los costos se calculan sobre la base de los métodos utilizados en el plan óptimo. La validez de dicho cálculo también se muestra en otro enfoque, en el cual los costos sociales en trabajo de cierto producto (en este caso, los costos laborales en un grupo) se encuentran según los costos directos de trabajo, teniendo en cuenta la condición en la que se utiliza.

Consideraremos un método específico de producción para obtener un producto particular en un plan óptimo (también sería posible tomar una cierta combinación de métodos que corresponda al plan para una unidad de producción definida), en el cual solo se produce el producto $(m+j)$, sin producir ni utilizar otros productos. Dado que este método se utiliza en el plan óptimo, tenemos para este método

$$c_1 x_1^s + \ldots + c_m x_m^s + c_{m+j}x_{m+j}^s = 0. \tag{12}$$

Por lo tanto, los costos laborales directos para una unidad del producto del tipo $(m+j)$ en este método son iguales a

$$\frac{-x_1^s}{x_{m+j}^s} = \frac{c_1 x_1^s}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i^s}c_{m+j}$$

Estos son diferentes de los valores $\bar{c}_{m+j}$ encontrados anteriormente por un factor

$$k = \frac{c_1 x_1}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i} : \frac{c_1 x_1^*}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i^s}$$

Este factor, el coeficiente de conversión, caracteriza la diferencia de las condiciones para la unidad de producción dada respecto a las condiciones promedio para el complejo, en lo que respecta a garantizar el suministro de factores útiles para el trabajo. El coeficiente $k > 1$ si las condiciones son más favorables que el promedio, y $k < 1$ si son menos favorables. En particular, si se utiliza el trabajo sin la aplicación de factores favorables que están disponibles en cantidades limitadas (puede llamarse trabajo desequipado), el

coeficiente que lo convierte a promedio es

$$k_H = \frac{c_1 x_1}{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i} < 1.$$

Así vemos que los costos necesarios expresados en trabajo promedio se pueden obtener multiplicando los costos directos del trabajo por un coeficiente de conversión que permite convertirlos a condiciones promedio. Sin embargo, el último enfoque que hemos estado considerando, aunque ayuda a comprender la esencia del problema, no es efectivo, ya que en la práctica es difícil construir estos coeficientes de conversión.

Sin embargo, resulta posible encontrar valoraciones del trabajo para los productos mediante el análisis de los gastos incurridos en su fabricación, si tenemos en cuenta los costos indirectos del trabajo, así como los directos.

Para ello, se deben obtener valoraciones de factores industriales favorables y expresarlas en términos de trabajo promedio. Estos serán

$$\bar{c}_i = \frac{x_1}{\sum_{r=1}^{m} c_r x_r} c_i \quad (t = 1, 2, \ldots, m).$$

En particular, para $i = 1$, obtenemos una valoración de una unidad de trabajo desequipado, expresada en términos de trabajo promedio.

Ahora calcularemos los costos laborales de una unidad de un producto de tipo $(m + j)$ en el proceso s, teniendo en cuenta tanto los costos directos del trabajo como los costos indirectos de los factores favorables según sus valoraciones expresadas en trabajo promedio. Usando (12) y (13), obtenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{\sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_i x_i^s}{x_{m+j}^s} &= -\frac{1}{x_{m+j}^s} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_1}{\sum_{r=1}^{m} c_r x_r} c_i x_i^s \\
&= -\frac{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i^s}{x_{m+j}^s} \cdot \frac{x_1}{\sum_{r=1}^{m} c_r x_r} \\
&= \frac{x_1}{\sum_{r=1}^{m} c_r x_r} c_{m+j} = \frac{-x_1}{\sum_{t=1}^{m} c_{m+1} x_{m+1}} c_{m+j} = \bar{c}_{m+j}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, este cálculo da el valor anterior de los costos laborales incurridos. Este método de cálculo también se puede aplicar cuando se incluyen otros tipos de productos en los costos, siempre que estos productos se contabilicen según sus valoraciones laborales.

Al definir los costos laborales dentro de un grupo, partimos de sus mediciones naturales. En condiciones más complicadas, el cálculo del costo social aparentemente solo se puede realizar en forma de valor. Sin embargo, las propiedades particulares que se han demostrado en el análisis anterior, como la necesidad de tener en cuenta los gastos indirectos y la conversión de las condiciones laborales a condiciones promedio, retienen su significado.

La importancia de los modelos matemáticos y su aplicación en el análisis económico.

Con el paso del tiempo, los métodos matemáticos han ido adquiriendo más importancia y un uso más amplio. Mientras que anteriormente su campo principal de aplicación estaba en las ciencias naturales y la tecnología, en la actualidad están encontrando una aplicación apreciable en otros campos de la ciencia y la actividad humana. Ejemplos característicos son la aplicación de métodos matemáticos en filología (en relación con la traducción automática) y en asuntos militares (investigación operativa).

Un campo altamente importante y natural para el uso de métodos matemáticos lo proporciona la economía (análisis de la planificación económica), que por su propia naturaleza tiene un carácter decididamente cuantitativo.

La simbología y los métodos matemáticos ocupan un lugar importante en las investigaciones económicas de Marx, y en las obras económicas y estadísticas de V.I. Lenin que tratan sobre el análisis económico del capitalismo. Estos métodos deben recibir énfasis especial en los problemas económicos de una sociedad socialista. La tarea de la ciencia económica marxista es revisar la naturaleza social de la sociedad capitalista y estudiar sus leyes generales y sus tendencias de desarrollo y declive. En la sociedad socialista, la ciencia económica debe servir como una herramienta para encontrar soluciones concretas a los problemas del desarrollo económico nacional. Las leyes económicas en una sociedad socialista tienen un carácter objetivo, pero se realizan en condiciones de una economía planificada en gran medida mediante una solución deliberada. Por lo tanto, la aplicación exitosa de las leyes en interés de la sociedad depende de cuán completamente y profundamente las dominemos.[12] Por lo tanto, está claro que el análisis marxista de los problemas económicos en la sociedad socialista y del mecanismo de funcionamiento de sus leyes debe ser lo más preciso, detallado y específico posible. Naturalmente, se espera que las matemáticas sean especialmente útiles en este tipo de análisis. Dada la complejidad e interdependencia de los problemas económicos en la producción moderna, no se puede esperar que sea posible tener éxito en el análisis cuantitativo de estos problemas con los medios matemáticos más simples. Aquí, sin duda, se requerirán los últimos logros de las matemáticas modernas.

Sin embargo, hasta tiempos recientes, el análisis matemático no solo se usaba raramente en problemas económicos, sino que incluso era necesario lidiar con objeciones definidas a su uso. Tales objeciones no pueden aceptarse como justificadas.

La falta de aprecio por la posibilidad de aplicar métodos matemáticos cuantitativos en el análisis de fenómenos económicos debido a su carácter específico es, en nuestra opinión, un vestigio de nociones sobre el carácter no objetivo de las leyes económicas del socialismo.

Igualmente injustificado es el prejuicio contra los métodos matemáticos debido a su uso parcial por parte de las escuelas económicas burguesas. Claramente, los precedentes del uso incorrecto de las matemáticas con fines diferentes a los nuestros no pueden evitar que los científicos soviéticos utilicen métodos matemáticos en problemas económicos de manera correcta y ventajosa en la construcción del comunismo.

El análisis matemático no se aplica directamente a los problemas de la realidad. Por lo general, mediante abstracciones, se construye un modelo matemático del fenómeno considerado, y este modelo puede tratarse matemáticamente. Este modelo naturalmente no incluye todos sus aspectos, sino solo algunos de los más importantes elegidos para una consideración particular. Por lo tanto, las soluciones y conclusiones

[12] A modo de ilustración de las diversas formas en que las leyes objetivas pueden realizarse, recordamos dos problemas clásicos del cálculo de variaciones: el problema de la catenaria y el braquistócrono (la curva de descenso más pronunciado). Un hilo pesado se cuelga en una catenaria independientemente de si la persona que sostiene sus extremos conoce o no la solución al problema relevante. Qué tan cerca está una curva de descenso de ser un braquistócrono depende de la medida en que el constructor de la curva haya dominado las leyes del cálculo de variaciones.

obtenidas como resultado del análisis son aplicables al problema real solo hasta cierto grado de aproximación. A menudo, el análisis cualitativo subsiguiente ayuda a saber en qué dirección se debe mejorar el modelo para que refleje mejor el problema real.

Al mismo tiempo, si existe un modelo, su análisis matemático puede ser utilizado no solo para obtener datos cuantitativos específicos, sino también para revelar nuevas regularidades, analizar relaciones causales y dependencias, y prever nuevos fenómenos (ejemplos de este tipo en la ciencia natural son el descubrimiento de Neptuno y la predicción teórica de ciertos fenómenos que ocurren a velocidades supersónicas y en la física atómica).

De suma importancia para la eficacia y aplicabilidad de un modelo en particular es la corrección de las premisas iniciales utilizadas en su construcción; también es necesario que los factores importantes estén incluidos de hecho y que los menos relevantes sean descartados. Así, ciertos modelos de economías capitalistas introducidos por economistas burgueses resultan ser necesariamente erróneos, ya que en su construcción los autores han ignorado la existencia del desempleo y fenómenos similares que son inherentes a su estructura social. Naturalmente, las conclusiones extraídas de estas premisas no merecen la menor credibilidad.

En consecuencia, al aplicar el análisis matemático y al construir modelos matemáticos para el estudio de problemas económicos en una sociedad socialista, es necesario que las premisas iniciales estén en acuerdo con los principios básicos del método marxista de análisis económico, a saber, el pensamiento dialéctico, el carácter objetivo de la investigación, el análisis social de las relaciones de producción, la preeminencia de la producción y el reconocimiento del trabajo como la única fuente de valor.

Los criterios fundamentales para estimar la importancia y corrección de dicha investigación, como para la verdad de cualquier conocimiento en general, deben ser el criterio leninista de la práctica. En otras palabras, la evaluación más importante debe radicar en la concordancia de los resultados obtenidos con la realidad y en su capacidad para explicar e influir en los fenómenos de nuestra realidad económica, de modo que puedan contribuir al desarrollo de medidas y soluciones más efectivas.

La sociedad socialista en su conjunto, y en sus diversos sectores, es, por su naturaleza, capaz de asegurar un uso más completo y racional de los recursos productivos para satisfacer mejor las necesidades de la sociedad. Por lo tanto, para cada sector de la producción socialista y para la sociedad socialista en su conjunto, un plan óptimo tiene una realidad concreta, y la coherencia de dicho plan con las leyes económicas corresponde a las conformidades económicas reales con las leyes de la sociedad socialista (similar a la manera en que el movimiento mecánico se rige por los principios variacionales extremos de la mecánica). A partir de esto, es evidente que en el análisis matemático cuantitativo de la economía planificada en una sociedad socialista, el enfoque básico debe ser la investigación de problemas matemáticos extremos [13]

En las condiciones de la sociedad socialista, un problema crítico es el de elevar el nivel de producción. En el estudio de este problema y de la economía de la sociedad socialista, se sabe que es correcto separar el problema de la producción del problema de la distribución. La consideración independiente del problema de la organización óptima de la producción es permisible, ya que en la economía socialista, sin crisis y con propiedad socialista pública de los medios de producción en sus dos formas, los bienes no pueden producirse según los requisitos de la sociedad y luego permanecer sin usar. En vista de esto, debemos aceptar los modelos de planificación de la producción (el problema fundamental y el modelo dinámico), que

[13] En la sociedad capitalista, la existencia de desempleo, crisis y la subutilización sistemática de las capacidades productivas muestra que el uso del principio del máximo para estudiar su economía en su conjunto es inadmisible. Por lo tanto, los intentos por parte de los economistas apologistas del capitalismo (por ejemplo, Pareto) de estudiar las leyes económicas del capitalismo, partiendo de las condiciones matemáticas para un máximo, son defectuosos en su método

hemos considerado, como plenamente justificados, y lo mismo se aplica a los problemas correspondientes de planificación a corto y largo plazo en los que se busca obtener el nivel máximo de producción de la composición necesaria a partir de recursos dados o, equivalentemente, obtener el rápido aumento de la producción[14]. Los resultados de analizar estos esquemas confirman que el requisito de que un plan de producción dado sea óptimo permite obtener conclusiones bastante sustantivas junto con sus importantes características cuantitativas[15].

No debe sorprendernos la circunstancia de que, además de la diferencia cualitativa en principio de las leyes de la sociedad socialista y capitalista y en el significado de las categorías económicas fundamentales, se encuentren analogías formales manifiestas en varios indicadores y relaciones cuantitativas, como la eficiencia normal y la ganancia normal, las valoraciones normales y el precio de producción. V. I. Lenin llamó la atención sobre esta posibilidad cuando señaló que "la unidad de la naturaleza se manifiesta en las ecuaciones diferenciales 'llamativamente análogas' relativas a varios campos de fenómenos".[16]

Como hemos notado, los modelos estudiados deben encontrar aplicación tanto en los problemas de la planificación económica nacional como en problemas más específicos de las diversas unidades de producción socialista y de problemas de planificación particulares.

El análisis de estos esquemas también lleva a un sistema de valoraciones objetivamente determinadas.[17]

La economía socialista se preocupa por obtener magnitudes de costos científicamente fundamentadas para diversos tipos de productos. Es esencial conocer estas magnitudes para resolver problemas de distribución del trabajo y de reemplazo de un producto o ciertos insumos por otros. Esta manifestación de las relaciones de valor en la sociedad socialista es fundamental.

La elección de una solución u otra como un problema económico separado no cambia fundamentalmente el plan general, sino que está relacionada solo con una de sus variaciones. Por lo tanto, las valoraciones o.d. que corresponden a las condiciones de producción en un plan óptimo y nos permiten, como hemos visto, hacer una comparación correcta de los resultados de diferentes variaciones de un plan, son adecuadas para determinar el efecto económico de la elección de soluciones económicas específicas. Esto se debe a que las valoraciones o.d. corresponden a la magnitud de los costos de (trabajo promedio), que es necesario para producir esta producción en las condiciones dadas. El hecho de que en este proceso sea necesario tener en cuenta los insumos de factores que determinan las condiciones para la aplicación y economía del trabajo, y que estos factores también tengan valoraciones o.d. (alquiler, valoraciones de alquiler de equipos), está simplemente relacionado con la necesidad de calcular correctamente los costos laborales, teniendo en cuenta las condiciones económicas nacionales de su uso; está relacionado con la necesidad de obtener no solo costos laborales parciales en cualquier unidad de producción, sino costos laborales totales.

Un cálculo completo de este tipo también garantiza que el nivel de costos de un producto dado caracteriza no solo los costos de variar el volumen de su producción, sino que, como regla general, resulta ser universal para todos los métodos (racionales) utilizados para producirlo en todas las unidades y, por lo

[14]En el capitalismo, el uso de tales modelos para el análisis general de la economía es imposible. Allí, la economía de un país en su conjunto no puede seguir un solo plan, y mucho menos uno maximal. En una economía capitalista, no solo los intereses de la sociedad están continuamente subordinados a los de las corporaciones capitalistas, sino que en lugar de verdaderos requisitos, siguen condiciones a corto plazo de la demanda que distorsionan por completo estos requisitos.

[15]En un sentido figurado, podríamos decir que el problema de la eficiencia se resolvería si se encontrara un hiperplano de soporte para el cono de todos los planes económicos.

[16]V.I Lenin: *Works*, vol 14, p.276 (Edición Rusa)

[17]Se debe enfatizar que el análisis de un modelo es una etapa necesaria en el estudio de un objeto, incluso si el modelo no representa completamente el objeto. Por ejemplo, en la ingeniería de la construcción, el cálculo de un edificio no incluye todas las vigas, tirantes y viguetas; sin embargo, sin dominar los métodos para calcular estos elementos, es imposible realizar cálculos correctos para el edificio en su conjunto.

tanto, coincide con el nivel global (promedio) de costos.[18]

Es importante destacar el realismo de la declaración anterior del problema de planificación óptima. Está determinado por el hecho de que el sistema de valoraciones o.d., que se construye junto con el plan óptimo, proporciona un medio para resolver una serie de problemas necesarios para la realización práctica de un plan, como la posibilidad de cambiar el plan (manteniéndolo óptimo) según cambios en la situación, la posibilidad de obtener indicadores para evaluar el trabajo de las unidades de producción por separado y para estimular la ejecución del plan óptimo, y así sucesivamente.

No obstante, se debe enfatizar que los modelos de planificación de la producción considerados son solo aproximaciones al problema real. Para hacer estos estudios más precisos, sería necesario considerar la suposición de linealidad, que no está completamente justificada, y tener en cuenta la naturaleza estocástica (problemática) de algunos datos iniciales: finalmente, se debe recordar tener en cuenta ciertos factores no económicos. Sin embargo, la introducción de estas consideraciones en los cálculos no puede cambiar las conclusiones básicas; por lo tanto, es de la mayor importancia seguir los caminos que proporciona el análisis básico de la planificación económica.

Al considerar estos modelos, por supuesto, se han pasado por alto varios problemas importantes, como la forma de realizar ajustes a la composición de los productos finales en el sector de la demanda privada sobre la base de estudios de demanda, problemas de asignación, en particular la estructura salarial, y así sucesivamente. Todos estos problemas requieren un estudio especial que no está dentro del alcance del libro; pero se presume que también aquí los métodos y modelos matemáticos encontrarían su lugar apropiado.

La mencionada área de problemas en su conjunto requiere mucha más investigación, que probablemente introducirá correcciones sustanciales a las proposiciones dadas en este libro y llevará al tratamiento de muchos problemas esenciales que no se han abordado aquí.

Sin embargo, no hay duda de que el análisis matemático contribuirá a una mejor comprensión de los aspectos cuantitativos de las leyes económicas que rigen una sociedad socialista y conducirá a un descubrimiento más completo de las ventajas de esta estructura social altamente perfeccionada. Esto ayudará a realizar de manera más completa las posibilidades del método socialista de producción en la economía nacional en su conjunto y en todos sus sectores.

[18] Ignorar el gasto indirecto conduce a una tergiversación de las relaciones reales de costos, lo cual puede compararse con lo obtenido en, por ejemplo, problemas de mecánica, si se excluyeran de la consideración fuerzas de reacción, inercia y fricción (o se tuvieran en cuenta solo cualitativamente), y solo se retuvieran las fuerzas activas "visibles".

Referencias

[1] L.V. KANTOROVICH, *Mathematical methods of organizing and planning production.* Leningrad State Universit (1939).
Puedes verlo en: https://resistir.info/livros/kantorovich_mathematical_methods.pdf

[2] A. TOLSTOI, *Methods for eliminating irrationalities from transport planning*, Sotsialisticheskii Transport, No. 9 (1939)

[3] L.V KANTOROVICH, *On the transfer of masses,* en Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. 37, pp. 227-229. (1937)

[4] L. V. KANTOROVICH y M. K. GAVURIN: *The use of mathematical methods in analysing problems of goods transport*, en la colección "Problems of Increasing Transport Efficiency (Problemy povysheniya effektivnosti raboty transporta)". Academy of Sciences Press (1949).

[5] L. V. KANTOROVICH y V. A. ZALGALLER: *Calculation of rational cuttingout of industrial materials* (Raschet ratsional'nogo raskroya promyshlennykh materialov). Lenizdat (1951).

[6] V. A. ZALGALLER: *A new development in the composition of log sawing consignments* (Novoye v sostavlenií postavov dlya raspilovki breven). Central Scientific Research Laboratory. "Sevzaples", Leningrad (1956).

[7] G. SH. RUBINSTEIN, *A problem of a limiting point of intersection of a line with a polyhedron*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 100, 4 (1955). G. SH. RUBINSTEIN, *Generalization of the problem of a limiting point*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 113, 5 (1957).

[8] L. V. KANTOROVICH, *Methods for analyzing certain extremal problems in production planning*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 115, 3 (1957).

[9] T. C. KOOPMANS (EDITOR), *Activity analysis of production and allocation*, Wiley, New York (1951).

[10] H. W. KUHN AND A. W. TUCKER (EDITORS), *Linear inequalities and related systems*, Ann. Math. Studies, 38, Princeton (1956).

Gracias por leer y difundir

Laulict